RELACIÓN 1: CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1.1- ¿Pueden la energía cinética y la potencial de un sistema mecánico contener una dependencia explícita con el tiempo si todas las ligaduras son escleronómas? ¿Y si existe alguna ligadura reónoma? Considere en todo caso que el sistema es holónomo.

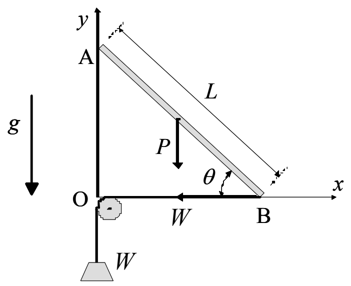
1.2- Demuestre que si las ecuaciones de ligaduras no contienen a las velocidades generalizadas (sistema holónomo) entonces se verifica la *regla de cancelación del punto*. ¿Qué ocurriría en el caso de que las ecuaciones sí contuviesen a dichas velocidades?

1.3- Compruebe que la regla de *cancelación del punto* se verifica en los casos particulares de (a) una masa que desliza sin rozamiento por acción de la gravedad sobre un plano inclinado, y de (b) una cuenta ensartada en un alambre parabólico de ecuación $z = a\rho^2$ con movimiento de rotación en torno al eje z con velocidad angular ω constante (ρ es la distancia perpendicular al eje).

1.4- Una varilla rígida, delgada, homogénea, de longitud L y masa M tiene ambos extremos apoyados sobre la pared y el suelo, formando originalmente un ángulo θ_0 con el suelo. La varilla desliza sin rozamiento por acción de la gravedad. Antes de que la varilla se separe de la pared sólo hay un grado de libertad, siendo el ángulo con el suelo, θ, la única coordenada generalizada. Obtenga la energía cinética de la varilla, el trabajo virtual y la fuerza generalizada.

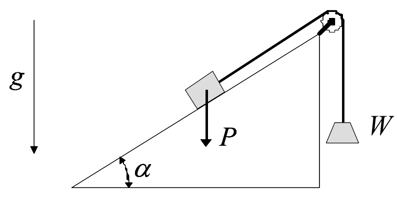
Solución: $T(\theta,\dot{\theta}) = ML^2\dot{\theta}^2/6$, $\delta W = Q_\theta \delta\theta$, $Q_\theta = -MgL\cos\theta/2$

1.5- Una barra rígida y homogénea AB, de peso P, tiene el extremo A al eje vertical y el extremo B unido al eje horizontal x. Sobre B actúa la tensión de un hilo que tras pasar por una polea en el origen de coordenadas, tiene un contrapeso W. Determine, en ausencia de rozamiento, la posición de equilibrio de la barra.



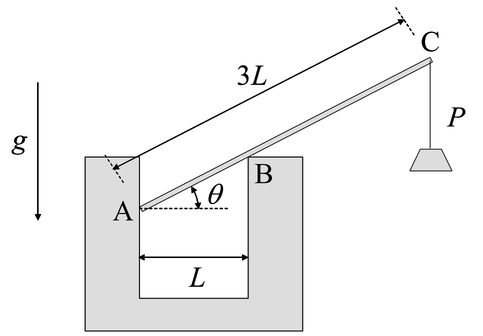
Solución: $\mathrm{tg}\,\theta = P/(2W)$.

1.6- Una masa de peso P está situada sobre un plano inclinado, fijo, de ángulo α, tal y como aparece en la figura. A dicha masa se une un hilo inextensible, que se hace pasar por una polea, y sobre el que se cuelga un contrapeso W. Estando el sistema en equilibrio, establezca, haciendo uso del Principio de los Trabajos Virtuales, la relación existente entre las fuerzas P y W. Considere el sistema contenido en el plano vertical y sin rozamientos.



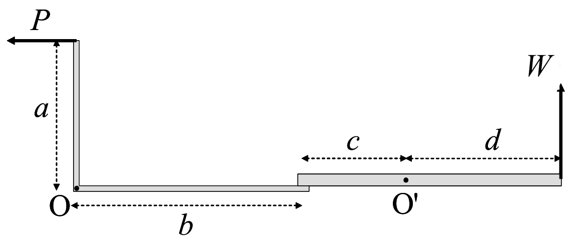
Solución: $W = P\,\mathrm{sen}\,\alpha$

1.7- Una varilla de peso despreciable y longitud $3L$ se encuentra apoyada en el interior de un vaso de anchura L, tal y como aparece en la figura. Sobre el extremo C se aplica un peso P que intenta provocar el vuelco de la varilla. Suponiendo que no existen fuerzas de rozamiento de ningún tipo, demostrar que el equilibrio de la varilla se consigue cuando el ángulo θ es igual a 46.1º, independientemente del valor del peso P.



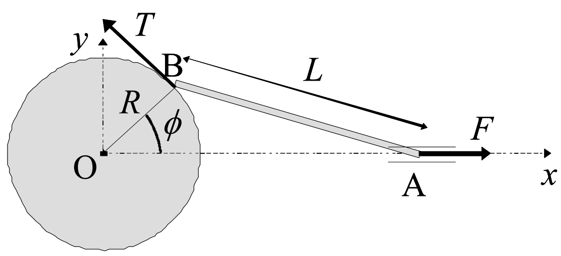
Solución: $\theta = 46.1^{\circ}$

1.8- Determine la condición de equilibrio del sistema formado por dos varillas de masa nula, la primera está formada por dos partes, a y b, en ángulo recto, y la segunda descansa horizontalmente, c-d, tal como indica la figura. Sobre ellas, actúan las fuerzas P y W. Los puntos O y O’ son articulaciones en torno a las cuales las dos varillas pueden rotar libremente.



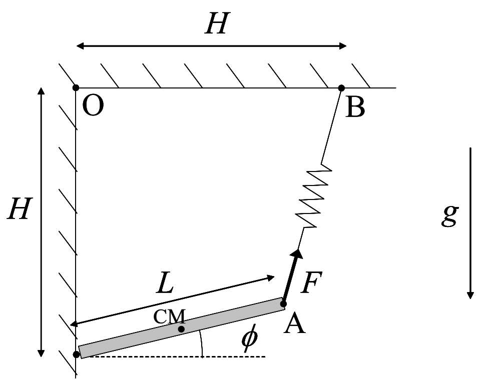
Solución: $P = \dfrac{bd}{ac} W$

1.9- Una barra rígida AB, de peso despreciable, tiene un extremo unido al eje x y el otro a una polea de radio R con centro en el origen O. El extremo A está sometido a la acción de una fuerza F ejercida en la dirección del eje x. Calcule, en ausencia de rozamiento, la fuerza tangente T que hay que aplicar sobre la superficie de la polea para mantener el sistema en equilibrio.



Solución: $T = F\left[\operatorname{sen}\phi + \dfrac{R\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{\sqrt{L^2 - R^2\operatorname{sen}^2\phi}}\right]$

1.10- Una varilla rígida y homogénea, de masa M y longitud L, tiene uno de sus extremos unido a la pared mediante un punto de articulación sin rozamiento. El otro extremo se encuentra unido a un muelle que ejerce una fuerza recuperadora F, tal y como indica la figura. Sabiendo que la gravedad actúa en la dirección vertical hacia abajo, a) deduzca la condición de equilibrio del sistema y b) encuentre las ecuaciones de equilibrio si ahora, además, permitimos que el punto de articulación unido a la pared puede deslizar verticalmente por ella.



Solución:

(a)
$$F = \frac{Mg}{2}\frac{\sqrt{2H^2 + L^2 - 2LH(\cos\phi + \mathrm{sen}\phi)}}{H(\cos\phi - \mathrm{sen}\phi)}\cos\phi$$

(b)
$$\left.\begin{aligned} s &= \left[2H - L\cos\phi\right]\mathrm{tg}\,\phi \\ F &= \frac{Mg\sqrt{H^2 + s^2 + L^2 - 2L(H\cos\phi + s\,\mathrm{sen}\,\phi)}}{(s - L\,\mathrm{sen}\,\phi)} \end{aligned}\right\}$$

(s es la distancia vertical desde O hasta el extremo izquierdo de la varilla)

1.11- Encuentre, haciendo uso del Principio de D'Alembert, las ecuaciones de movimiento de una partícula obligada a deslizar sin rozamiento por acción de la gravedad (actuando en la dirección $-z$) sobre un alambre con forma de hélice de ecuaciones $x^2 + y^2 = a^2, z = b\phi$.

Solución: $\ddot{\phi} = -bg/(a^2 + b^2)$

1.12- Considere un péndulo formado por una masa m que cuelga de un muelle de masa nula, constante elástica k y longitud natural l_0, cuyo movimiento se encuentra restringido al plano vertical. El sistema tiene dos grados de libertad que se puede tomar como θ (el ángulo del péndulo respecto al eje vertical) y la longitud del muelle, l. (a) Encuentre las componentes de las fuerzas generalizadas. (b) Deduzca las ecuaciones del movimiento usando el Principio de D'Alembert.

Solución:

(a) $Q_\theta = -mgl\sin\theta,\ \ Q_l = -k\left(l - l_0\right) + mg\cos\theta.$

(b) $-k\left(l - l_0\right) + mg\cos\theta - m\ddot{l} + ml\dot{\theta}^2 = 0,\quad mgl\sin\theta + 2ml\dot{l}\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = 0$

1.13- Un masa puntual m está sometida a una fuerza central, $F(r)$, siendo r es la distancia de la masa a un centro de fuerza, O. Suponiendo que la partícula se mueve en un plano, se pide (a) obtener las ecuaciones de movimiento empleando las coordenadas polares r y ϕ, y (b) obtener las ecuaciones de movimiento empleando las coordenadas x

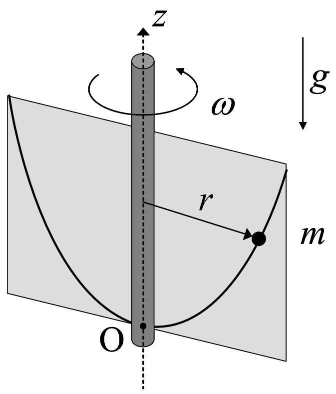
e y. ¿Cuál de las dos descripciones es más conveniente? En ambos casos emplee el Principio de D'Alembert.

Solución:

(a) $$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r) \qquad \dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \qquad (L = cte)$$

(b) $$m\ddot{x} = F(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad m\ddot{y} = F(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1.14- Un alambre rígido, de masa despreciable, de forma parabólica de ecuación $z = ar^2$, está sujeto a un eje vertical tal y como se ve en la figura. Una partícula de masa m puede deslizar libremente y sin rozamiento a lo largo del alambre. Suponga que el eje central se hace girar a velocidad angular constante ω por medio de un motor externo. (a) Enumere y clasifique todas las ligaduras (holónoma/no holónoma, esclerónoma/reónoma) que están actuando. (b) Determine el número de grados de libertad del sistema, y elija un conjunto adecuado de coordenada(s) generalizada(s) para describir su evolución. (c) Mediante el Principio de D'Alembert, obtenga la(s) ecuación(es) de movimiento.



Solución:

(a) $z - ar^2 = 0$, holónoma/esclerónoma; $\phi = \omega t + \phi_0$, holómoma y reónoma

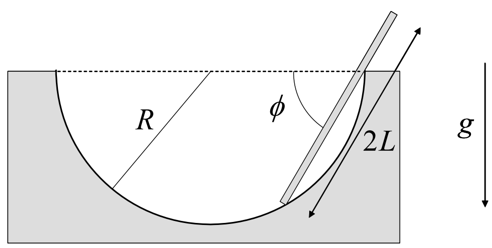
(b) 1 grado de libertad

(c) $\left[1+4a^2r^2\right]\ddot{r} + 4a^2r\dot{r}^2 + \left[2ag-\omega^2\right]r = 0$

1.15- Un cilindro homogéneo y rígido de masa m, radio R y con momento de inercia I respecto al eje longitudinal que pasa por su centro, está rodando sin deslizar por acción de gravedad sobre un plano inclinado fijo que forma un ángulo α con la horizontal, de manera que el movimiento queda contenido en un plano. Emplee el Principio de D'Alembert para obtener las ecuaciones de movimiento del cilindro.

Solución: $\ddot{s} = \dfrac{g \operatorname{sen} \alpha}{1 + I/(mR^2)}$

1.16- Una varilla homogénea de longitud $2L$ y masa M desliza sin rozamiento dentro de un cuenco esférico de radio R. (a) Determine la fuerza generalizada Q_ϕ. (b) Haciendo uso del Principio de los Trabajos Virtuales, deduzca el ángulo ϕ para que la varilla esté en equilibrio.



(c) Emplee el Principio de D'Alembert para obtener las ecuaciones de movimiento. Suponga que el movimiento tiene lugar en un plano.

Solución:

(a) $Q_\phi = Mg\left(2R\cos(2\phi) - L\cos\phi\right)$

(b) $\cos\phi = (L + \sqrt{L^2 + 32R^2})/8R$

(c) $M\ddot{\phi}\left[4R^2 + \frac{4}{3}L^2 - 4RL\cos\phi\right] + 2MRL\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\phi - Mg\left(2R\cos(2\phi) - L\cos\phi\right) = 0$

1.17- Una partícula de masa m desliza sobre un plano horizontal rugoso que le ejerce una fuerza de fricción opuesta a su movimiento y de valor $f = \mu N$, donde μ es el coeficiente de fricción y N es la normal ejercida por el plano sobre la partícula. Obtenga las ecuaciones de movimiento de la partícula haciendo uso del Principio de D'Alembert.

Solución: $m\ddot{x} = -\mu mg\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ $\qquad m\ddot{y} = -\mu mg\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$.